Racine numérique d'un entier et preuve par 9

Axel Casadesus

30 mars 2025

Lemme Tout entier est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres.

Démonstration $10^n a_n + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \equiv a_n + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9$ car $10 \equiv 1 \pmod 9$.

Théorème et définition Soit $n \in E = \mathbb{N} \setminus \{0, \ldots, 9\}$ et $S(n)$ la somme des chiffres de n. On note S^k la k-ième itérée de S. Il existe un entier k tel que $S^k(n)$ soit un nombre à un seul chiffre. Le nombre $S^k(n)$ est appelé *racine numérique* de n.

Démonstration Tout entier $n \in E$ $\left(n = 10^n a_n + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0\right)$ est supérieur à la somme $S(n) = a_n + \ldots + a_1 + a_0$ de ses chiffres car $\forall n \in E \quad 10^n > 1$. La suite $i \mapsto S^i(n)$ est donc strictement décroissante. Toute suite d'entiers positifs strictement décroissante étant finie, $S^k(n)$ existe.

Théorème Tout entier est congru modulo 9 à sa racine numérique.

Démonstration (par récurrence)

- $S^0(n) = S(n)$ donc $S^0(n) \equiv n \pmod 9$
- Supposons que, pour p fixé, $S^p(n) \equiv n \pmod 9$ et montrons qu'alors $S^{p+1}(n) \equiv n \pmod 9$: $S^{p+1}(n) = S\left[S^p(n)\right] \equiv S^p(n) \pmod 9$ d'après le lemme. Comme $S^p(n) \equiv n \pmod 9$, il en résulte que $S^{p+1}(n) \equiv n \pmod 9$.
- Ainsi, $\forall p \in \mathbb{N} \quad S^p(n) \equiv n \pmod 9$, la propriété étant héréditaire. En particulier, $n \equiv S^k(n) \pmod 9$.

Application : la preuve par 9 Considérons l'affirmation $542 \times 327 = 177254$. On a : $542 \equiv 2 \pmod 9$ et $327 \equiv 3 \pmod 9$ (car $3 + 2 + 7 = 12$ et $1 + 2 = 3$). Le produit devrait donc être congru à $2 \times 3 = 6$. Or $177254 \equiv 8 \pmod 9$ (car $1+7+7+2+5+4 = 26$ et $2+6 = 8$). L'affirmation est donc fausse.

remarque : la preuve par 9 est une preuve de fausseté et non de vérité. En effet, si les racines numériques du membre de gauche et du membre de droite du calcul coïncident, ce dernier peut être faux malgré tout (c'est le cas, par exemple, si on permute deux chiffres dans l'un des nombres).