Quelques galères en probas...

Erreur classique en combinatoire

On tire 8 cartes d'un jeu de 32. Quel est le nombre de tirages amenant au moins un roi ?

L'erreur classique consiste à répondre $C_4^1 \times C_{31}^7$ (un roi et une carte quelconque parmi les 31 restantes, comme ça on est sûr d'avoir au moins un roi)

Le problème, c'est que C_4^1 est le nombre de façons de choisir un roi parmi 4 et que ça ne précise pas du tout de *quel* roi il s'agit. Cela peut être, disons, le roi de coeur. C_{31}^7 est le nombre de façons de choisir 7 cartes *quelconques* parmi 31. On recompte donc *en particulier* le nombre de façons de choisir le roi de coeur et 6 autres cartes ! Du coup, on obtient un résultat supérieur au résultat réel qui est évidemment :

$C_{32}^8 - C_{28}^8$ (nombre total de mains moins nombre de mains ne contenant *aucun* roi)

Ordre ou pas ordre ?

Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 4 boules noires numérotées de 1 à 4. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

Un tirage simultané équivaut à un tirage successif sans remise *dans lequel on ne tient pas compte de l'ordre*. On peut calculer la probabilité demandée en tenant compte de l'ordre ou non car les numéros n'ont ici aucune importance. Celle-ci est donc :

$\dfrac{A_6^3}{A_{10}^3}$ ou $\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}$. De manière générale, $\dfrac{A_m^p}{A_n^p} = \dfrac{C_m^p}{C_n^p}$, p! se simplifiant dans le quotient de droite.

En revanche, si l'on cherche la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et une boule noire, tenir ou non compte de l'ordre ne conduit pas au même résultat. La probabilité est plus grande si l'on tient compte de l'ordre.

La couleur des dés a-t-elle une importance ? (heureusement, non!)

On lance simultanément 2 dés (ou 2 fois successivement le même dé, cela revient au même). Le nombre de cas possibles est 36 que les dés soient de la même couleur ou pas. En effet, il y aura toujours de toutes façons 2 manières d'obtenir par exemple 7 (6+1 et 1+6) et une seule d'obtenir 12 (6+6) ! On n'y peut rien : il faut tenir compte de l'ordre bien qu'on s'en moque en réalité !

Histoire de sexe

Mon voisin a 2 enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Le problème est un peu de la même nature que ci-dessus : quoiqu'on y fasse, l'éventualité {garçon;fille} a 2 occurrences (G,F) et (F,G) alors que l'éventualité {garçon;garçon} n'en a qu'une. On *doit* donc tenir compte de l'ordre! L'énoncé induit une restriction de l'univers à 3 événements possibles : (F,G), (G,F) et (F,F). Il n'y a que 2 cas favorables : (F,G) et (G,F). Ainsi, la probabilité cherchée est 2/3. On peut aussi raisonner en conservant en totalité l'ensemble des possibles et en utilisant les probabilités conditionnelles :

$$P(G/F)=\frac{P(G\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

Mon voisin a 2 enfants dont l'ainée est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon?

Décidons de noter l'ainé comme élément gauche du couple. Il n'y a cette fois que 2 cas possibles : (F,G) et (F,F). Seul 1 cas est favorable. La probabilité cherchée est donc 1/2. Ou, en utilisant les probabilités conditionnelles :

$$P(G/F)=\frac{P(G\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$$