$1^\circ S_3$

MATHÉMATIQUES

Pour Lundi 10/03/86

D.H. n°12

Le but du problème est, un triangle ABC dont aucun des angles ne mesure plus de 120° étant donné dans un plan, de déterminer un point M du plan tel que la somme MA+MB+MC soit minimum et d'étudier quelques propriétés de la configuration obtenue - On supposera ABC orienté dans le sens direct.

A - Question préliminaire

Soit M un point situé à l'extérieur du triangle ABC. Montrer que MA+MB+MC ne peut être minimum en M. (si, par exemple, M est situé dans le demi-plan limité par (BC) ne contenant pas A, considérer le point M' symétrique de M par rapport à (BC)). Conclure. (figure 1)

B - Première solution du problème. (Hofmann, 1929)

Soit M un point quelconque intérieur à ABC, R la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$, $M'=R(M)$, $A'=R(A)$. (figure 2)

1°) Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur C, M, M', A' pour que MA + MB + MC soit minimum -

2°) Soit T le point d'intersection de la droite (A'C) avec le cercle circonscrit à ABA' et $T'=R(T)$. (faire une nouvelle figure : figure 3). Montrer que $T' \in (A'T)$ et en déduire que la condition énoncée au 1° est effectivement réalisée pour M = T. Conclure. T est connu sous le nom de "point de TORRICELLI" du triangle ABC.

C - Deuxième solution du problème. (celle de Torricelli lui même, 1640)

1°) Montrer que le point T obtenu en B.2° est le point intérieur au triangle d'où l'on voit chaque côté sous un angle de 120°. (figure 4)

2°) Nous allons partir de cette définition de T et montrer que c'est bien la solution du problème - Construire les perpendiculaires (ZY), (ZX), (XY) à (TA), (TB), (TC) passant respectivement par A, B, C. Démontrer que XYZ est équilatéral. (figure 5).

3°) Soit Q un point intérieur à ABC distinct de T, A', B', C' ses projetés sur les côtés de XYZ. Montrer, en utilisant le théorème de Viviani que QA+QB+QC > TA+TB+TC. Conclure -

D - Quelques compléments.

1°) On construit extérieurement à un triangle ABC les triangles équilatéraux ABC', CB'A, CBA'. Comparer $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$ et $\vec{CC'}$ en norme et en direction. (fig. 6)

2°) Montrez que les cercles circonscrits à ABC', CB'A, CBA' ont un point commun. (fig. 7)

3°) Soient X, Y, Z les centres de ABC', CB'A, CBA'. (fig. 8) Le triangle XYZ est connu sous le nom de "triangle de Napoléon".

a) Une droite passant par A coupe les cercles (ABC') et (CB'A) en P et Q. (PB) et (QC) se coupent en R. Montrer que R est sur le cercle (CBA') et que PQR est équilatéral.

b) Soient M, N les projetés orthogonaux de X et Y sur (QR), S celui de X sur (YN). Montrer que QR = 2XS et en déduire QR ≤ 2XY. Pour quelle position de (RQ), RQ est-il maximum ?

c) Indiquer de même pour quelles positions de (PQ) et (PR) PQ et PR sont maximaux et en déduire que le triangle XYZ est équilatéral -