Théorème de la partition monotone

(généralisation de $C_n^p = C_n^{n-p}$)

Soit E un ensemble à n éléments. On cherche le nombre de partitions de E en m sous ensembles ($m \leq n$) de cardinaux $p_1, p_2, \cdots, p_m$ avec $\sum_{k=1}^{m} p_k = n$.

Théorème

* Ce nombre est $\boxed{\prod_{i=1}^{m} C_{n-\sum_{k=1}^{i-1} p_k}^{p_i}}$.

* De plus, on a : $\boxed{\prod_{i=1}^{m} C_{n-\sum_{k=1}^{i-1} p_k}^{p_i} = \prod_{i=1}^{m} C_{n-\sum_{k=1}^{i-1} p_{\sigma(k)}}^{p_{\sigma(i)}}}$,

pour toute permutation σ de $\{1;\dots;m\}$, le résultat ne dépendant pas de l'ordre dans lequel les sous-ensembles sont remplis.

rem. Cette dernière proposition peut se démontrer directement par récurrence sur m, le résultat pour m = 2 provenant du fait que $C_n^p = C_n^{n-p}$.

ex. Nombre de façons de répartir 10 objets dans 4 casiers, le premier pouvant recevoir 3 objets, le second 2, le troisième 1 et le quatrième 4.

Le résultat est :

$$C_{10}^3 \times C_7^2 \times C_5^1 \times C_4^4 = C_{10}^4 \times C_6^1 \times C_5^2 \times C_3^3 = C_{10}^2 \times C_8^3 \times C_5^1 \times C_4^4 = \dots$$