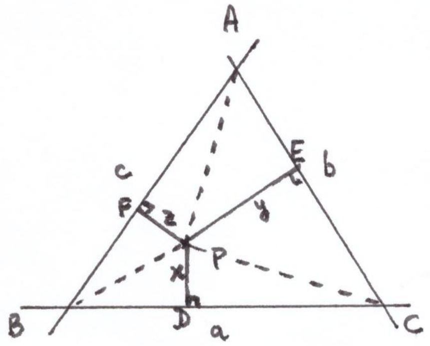
Enoncé

Pour tout point P intérieur à un triangle ABC donné on appelle respectivement D,E,F les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur BC, CA, et AB. Trouver tous les points P tels que $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ soit minimum.

Solution



Notons BC=a, CA=b, AB=c

PD=x, PE=y, PF=z

(réels tous strictement positifs)

On a $\boxed{ax+by+cz=2S}$ où S désigne l'aire de ABC.

On cherche pour quelle(s) valeur(s) de x,y,z l'expression $f(x,y,z)= \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ est minimum.

* Fixons x et cherchons pour quelle(s) valeur(s) de y $\frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ est minimum.
  Si x est fixé, by+cz est constant. Posons by+cz=k.
  Alors $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = g(y) = \frac{b}{y} + \frac{c^2}{k-by}$.

  On a $g'(y) = \frac{b[(c-b)y+k][(b+c)y-k]}{y^2(k-by)^2}$.

  Supposant, sans perte de généralité, que $b \geq c$, on voit que g présente un minimum strictement positif lorsque (b+c)y=by+cz, soit y=z.

* Par symétrie de raisonnement on montrerait qu'il est nécessaire pour que f soit minimum pour y ou z fixés que l'on ait respectivement x=z et x=y.

* f est donc minimum lorsque x=y=z, c'est à dire lorsque P est le centre du cercle inscrit dans ABC.