ISOMÉTRIES PLANES 2

Translation $\boxed{M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$

Propriété caractéristique : $\begin{cases} A' = t_{\vec{u}}(A) \\ B' = t_{\vec{u}}(B) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}}$

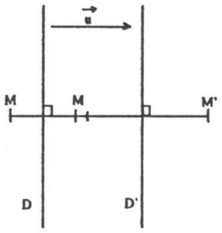
Rotation $\boxed{M' = r_{(O;\alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) = \alpha(2\pi) \\ OM = OM' \end{cases}}$

Propriété caractéristique : $\begin{cases} A' = r(A) \\ B' = r(B) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \alpha(2\pi) \\ A'B' = AB \end{cases}}$

Réflexion $\boxed{M' = s_D(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp D \\ \mathrm{mil}(M,M') \in D \end{cases}}$

Produit de deux réflexions

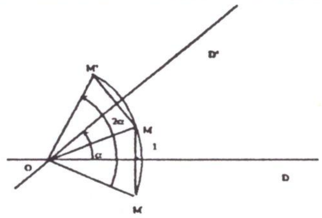
- d'axes parallèles : translation



$\boxed{s_{D'} \circ s_D = t_{2\vec{u}}}$

Réciproquement, toute translation peut se décomposer d'une infinité de manières en le produit de deux réflexions d'axes parallèles, l'un des axes pouvant être choisi arbitrairement parmi les perpendiculaires au vecteur de la translation.

- d'axes sécants : rotation

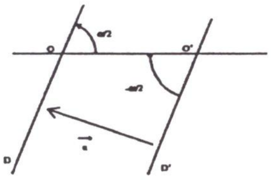


$\boxed{s_{D'} \circ s_D = \mathrm{rot}(O;2\alpha)}$

Réciproquement, toute rotation r(O; α) peut se décomposer d'une infinité de façons en le produit de deux réflexions d'axes D et D' sécants en O tels que (D,D')=α/2(π), l'un des axes pouvant être choisi arbitrairement parmi les droites passant par O.

Produit de deux rotations

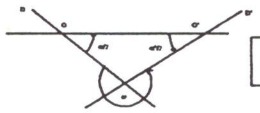
- d'angles opposés : translation



$\boxed{r'(O';\alpha) \circ r(O;-\alpha) = t_{2\vec{u}}}$

(si O=O', r'or=Id)

- d'angles non opposés : rotation

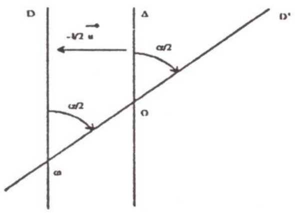


$\boxed{r'(O';\alpha') \circ r(O;\alpha) = R(\omega;\alpha+\alpha')}$

(si O=O', ω=O)

dém. $r' \circ r = (s_{D'} \circ s_{OO'}) \circ (s_{OO'} \circ s_D) = s_{D'} \circ s_D$

Produit d'une rotation et d'une translation : rotation (de même angle)



$r(O;\alpha) \circ t_{\vec{u}} = (s_{D'} \circ s_\Delta) \circ (s_\Delta \circ s_D) = s_{D'} \circ s_D$

donc : $\boxed{r(O;\alpha) \circ t_{\vec{u}} = R(\omega;\alpha)}$

Le produit d'une translation et d'une réflexion est une isométrie négative particulière sans point fixe appelée pseudo-symétrie ou symétrie glissée. (en anglais : glide reflexion)

Le soin est laissé au lecteur de vérifier qu'aucun des produits de cette fiche n'est commutatif (sauf cas particuliers) et d'expliciter les produits gof connaissant les produits fog.