Courbes paramétrées planes

- Une courbe paramétrée plane C est un ensemble de points du plan M(t)(x(t),y(t)) dont les coordonnées sont des fonctions numériques d'un paramètre t décrivant une partie D de R:

$$C:\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases} \quad t \in D$$

- Si f et g ont une période commune T, on restreint l'étude à un domaine de largeur T.
- Il convient d'examiner en premier lieu si la courbe C présente des symétries. A cet effet, il faut observer les conséquences d'un changement de variable $t \mapsto h(t)$. Si l'on constate, par exemple, que l'on a x(h(t))=y(t) et y(h(t))=x(t), alors C admet la droite d'équation y=x pour axe de symétrie. Il faut bien garder présent à l'esprit que ce n'est pas le changement de variable lui-même qui compte, mais son effet sur x et y. Les changements de variables classiques à essayer dans un premier temps sont : $t \mapsto -t$, $t \mapsto t+\pi$, $t \mapsto 1/t$, etc...
- La tangente à C au point M(t_0) est dirigée par le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ *sauf dans le cas où celui-ci est nul*. Dans cette dernière situation (théoriquement hors-programme!), le coefficient directeur de la tangente est donné par $\lim\limits_{t \to t_0}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$. Si on n'obtient toujours pas de résultat par ce calcul, ce dernier est obtenu par $\lim\limits_{t \to t_0}\left(\frac{y^{(p)}(t)}{x^{(p)}(t)}\right)$ pour le premier entier p pour lequel ça marche, mais chut, c'est vraiment hors-programme.

- **Un exemple :** $C:\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases}$ $(t \in [-\pi, \pi])$ (cardioïde)

  On remarque que x(-t)=x(t) et y(-t)=-y(t). C est donc symétrique par rapport à (Ox) et on restreindra donc l'étude à [O,π].

  On a : $\begin{cases} x'(t) = -\sin t(1+2\cos t) \\ y'(t) = \cos 2t + \cos t \end{cases}$. Ce vecteur n'est pas nul sauf pout t=π. Mais dans ce cas, $\lim\limits_{t \to \pi}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to \pi} tg\, t = 0$ et C présente donc une tangente horizontale en O.

t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
x'	0	+	|	+	0	−	0
x	2	↘	3/4	↘	−1/4	↗	0
y'		+	0	−	|	−	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	0