# AUTOUR DE LA FORMULE DE TAYLOR

* **Rappel** **Toute fonction f de classe $C^n$ au voisinage de x admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x donné par la formule de TAYLOR-YOUNG :**

$$\boxed{f(x+h)=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x)\right)+h^n\varepsilon(h)} \text{ avec } \lim_{0}\varepsilon = 0$$

I - Donner les développements limités d'ordre n au voisinage de 0 de :

$$e^x,\ \cos x,\ \sin x,\ \ln(1+x),\ \frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1-x}.$$

II - Calculer : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{e^x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(e+x)]^{\frac{1}{x}}$.

III - 1°) Ecrire la formule de Taylor pour un polynôme P(x) en un point a sous la forme P(x)=...
*( celle-ci s'appelle alors formule de MAC-LAURIN )*

2°) Démontrer le théorème fondamental sur la factorisation des polynômes :
" P est divisible par (x-a) <=> a est une racine de P "

3°) Démontrer le théorème dit *des racines multiples* :
" a est racine de multiplicité k d'un polynôme P

$\Leftrightarrow P(a)=P'(a)=...=P^{(k-1)}(a)=0$ et $P^{(k)}(a)\neq 0$ "

4°) Trouver l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de :

$$x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1 \quad ( n\geqslant 2 )$$

5°) Montrer que le polynôme suivant n'a aucune racine multiple réelle :

$$\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+ \dots + 1 \qquad ( n>1 ).$$