Justification de la forme exponentielle d'un nombre complexe

Le but du problème est de montrer que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ pour tout réel θ. Les prérequis nécessaires à la résolution de ce problème sont : *complexes, logarithmes, exponentielles, suites, limites particulières via la définition du nombre dérivé.*

1. x étant un réel quelconque et n un entier naturel non nul, on pose :
$$X_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = e^x$.

2. z étant un nombre complexe quelconque et n un entier naturel non nul, on pose :
$$Z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
On note x et y les parties réelle et imaginaire de z.

   (a) Soit $\rho_n = |Z_n|$. Montrer que :
$$\ln\rho_n = \frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}\right)$$

   (b) Soit $\epsilon_n = \dfrac{2x}{n} + \dfrac{x^2+y^2}{n^2}$. Montrer que :
$$\ln\rho_n = \frac{\ln(1+\epsilon_n)}{\epsilon_n} \times \frac{n\epsilon_n}{2}$$

   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\rho_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n$.

   (d) Montrer que, pour tout complexe z, on peut trouver, pour n assez grand, un argument α_n de $1 + \dfrac{z}{n}$ qui vérifie $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha_n < \dfrac{\pi}{2}$.

   (e) Calculer $\tan\alpha_n$ en fonction de n, x et y.

   (f) En déduire qu'un des arguments Θ_n de Z_n peut s'écrire :
$$\Theta_n = \frac{\alpha_n}{\tan\alpha_n} \times \frac{ny}{n+x}$$

   (g) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \Theta_n$.

3. En comparant les résultats obtenus aux deux questions précédentes, montrer que l'on est amené à poser $e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$, c'est à dire, pour tout réel y :
$$\cos y + i\sin y = e^{iy}$$