Enoncé

On doit acheter 100 têtes de bétail exactement (chèvres, moutons ou vaches) pour une somme totale de 100F, cette somme devant être intégralement dépensée. Une chèvre vaut 1F, 20 moutons valent 1F et une vache vaut 5F. Combien doit-on acheter de chèvres, de moutons et de vaches ?

Solution

Notons c,m, et v les nombres de chèvres, de moutons et de vaches cherchés. Les hypothèses se traduisent par le système suivant :

$$\begin{cases} c + m + v = 100 \\ c + \frac{1}{20} m + 5v = 100 \end{cases}$$

Ce système de 2 équations à 3 inconnues admet *a priori* une infinité de solutions : il suffit de fixer l'une des inconnues pour trouver les deux autres. En fait, la situation est ici un peu particulière, car on ne recherche que les triplets de solutions *entières*. Dès lors (l'arithmétique vole à notre secours!), la deuxième égalité ne peut avoir lieu que si m est un multiple de 20, ce qui limite le nombre de solutions puisqu'on doit donc nécessairement avoir $m \in \{0;20;40;60;80;100\}$. Il ne reste plus qu'à traiter les différents cas :

m=0 On trouve facilement : v=0 et c=100
m=20 Impossible car on arrive à 4v=19 (v non entier)
m=40 Impossible pour une raison analogue (4v=38)
m=60 Impossible (4v=57)
m=80 v=19 c=1
m=100 Impossible (4v=95)

Le problème admet donc exactement deux solutions : (100;0;0) et (1;80;19) (seule la deuxième est non triviale!)

Le commentaire du jour

Nous sommes sur le terrain des équations entières (dites aussi équations *diophantiennes*), ce qui constitue un vaste sujet : les théorèmes de Fermat[1] font partie de la famille! Il y a toute une panoplie d'armes plus ou moins offensives pour attaquer ce genre de problèmes : l'arithmétique, la combinatoire, et même l'analyse et la géométrie! Par exemple, on peut s'intéresser à la *seule* première équation en nombres entiers du problème précédent : quelles sont toutes les solutions entières de c+m+v=100 (et plus généralement de $x_1+x_2+...+x_n=p$)? Ici, c'est la combinatoire qui se révèle un outil puissant. Mais peut-être en reparlerons nous... plus tard!

[1] Petit théorème de Fermat : n^p-n est divisible par p pour nombre premier p (assez élémentaire)
Grand théorème de Fermat : $x^n+y^n=z^n$ n'admet aucun triplet de solutions entières pour n>2 (démontré, paraît-il en 1994...)