# Techniques démonstratives en mathématiques

## Le raisonnement par récurrence

(uniquement pour des propriétés portant sur des *entiers naturels*!)
Pour prouver que pour tout entier naturel supérieur ou égal à m P(n) est vraie :
- On montre P(m)
- On suppose que, pour n fixé (ou "jusqu'à n fixé"), P(n) est vraie et on montre qu'*alors* P(n+1) l'est aussi.

## Le procédé de symétrisation

Pour étendre une propriété établie pour tout entier naturel à tout entier relatif n, on pose m=-n pour $n \in \mathbb{Z}^-$. On utilise alors le fait que la propriété est vraie pour m, puisque m est un entier naturel.

## L'extension à $\mathbb{Q}$

Pour étendre une propriété établie pour $n \in \mathbb{Z}$ à tout rationnel r, on pose r=p/q $\left(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{PGCD}(p,q)=1\right)$
On montre alors que la propriété est vrie pour r=p/q en utilisant le fait qu'elle l'est pour p et q.

## L'extension à $\mathbb{R}$

Pour étendre une propriété établie pour $r \in \mathbb{Q}$ à tout réel x, on pose $x = \lim\limits_{\infty} u$ où u est une suite de *rationnels* qui converge vers x (par exemple la suite des valeurs décimales approchées par défaut de x). On montre alors que la propriété est vraie pour x réel en utilisant le fait qu'elle l'est pour $u_n$. Pour cela, on utilise souvent le théorème : $f \text{ continue} \Rightarrow \lim\limits_{\infty} f(u) = f\left[\lim\limits_{\infty} u\right]$

## Le raisonnement par l'absurde

On suppose que la propriété à démontrer n'est pas vérifiée et on montre qu'on aboutit alors à une contradiction avec les hypothèses.

## L'implication

A=>B se lit "si A, alors B". A=>B est équivalent à "(non A) ou B". A s'appelle l'*hypothèse* et B la *conclusion*. A est dite *condition suffisante* pour avoir B et B est dite *condition nécessaire* pour avoir A (car, si non B, alors non A). La rédaction de la démonstration de A=>B doit commencer par "Supposons A".

## Le raisonnement par contraposition

Pour démontrer A=>B, on montre (non B)=>(non A) (proposition contraposée de A=>B).

Il convient donc de savoir nier :

* les propositions :
  - la négation de (A et B) est : (non A) ou (non B)
  - la négation de (A ou B) est : (non A) et (non B) *(lois de Morgan)*
* les prédicats :
  - la négation de "pour tout x élément de E, P(x)" est : "il existe au moins un x de E [non P(x)]"
  - la négation de "il existe au moins un x de E, P(x)" est : "pour tout x de E, [non P(x)]

  *Rappelons à ce propos que la rédaction de la démonstration de toute propriété commençant par "Pout tout x élément de E..." doit commencer par : "Soit x élément de E".*

## L'équivalence

A<=>B se lit "A si et seulement si B" ou "A et B sont mutuellement condition nécessaire et suffisante l'un pour l'autre". Montrer A<=>B revient à montrer A=>B *et* B=>A (proposition *réciproque* de A=>B). Parfois, on peut procéder directement par équivalences successives à condition de s'assurer à chaque étape du raisonnement de la validité de la réciproque.

## Pour montrer l'égalité de deux ensembles

Pour prouver que E=F, il est souvent nécessaire de prouver "E est inclus dans F" *et* "F est inclus dans E".

## Pour montrer l'unicité d'un objet vérifiant une propriété P

Une technique classique consiste à supposer qu'il existe deux objets distincts vérifiant P puis à montrer que ces deux objets sont confondus. C'est une forme de raisonnement par contraposition.