DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE
EXEMPLE - TYPE

Montrons, par récurrence sur n, que $\forall n\in\mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

∗ Pour n=0, la propriété s'écrit : $0=\frac{0\times(0+1)}{2}$, ce qui est vrai.

rem. évidemment, on initialise la récurrence à n=150 si la propriété à démontrer n'est vraie qu'à partir de n=150 !

∗ Supposons que, pour n fixé $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

et montrons qu'alors : $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On a : $\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)+(n+1)$

$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ **d'après l'hypothèse de récurrence**

$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

rem. il est recommandé, dans les cas délicats, d'écrire au brouillon la propriété à démontrer pour plusieurs valeurs simples de n; l'idée qui fait passer de 2 à 3 est souvent celle qui fait passer de n à n+1 ...

∗ Comme $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ **et que** $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ **sous l'hypothèse que** $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **pour n fixé, alors** $\forall n\in\mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

la propriété étant ainsi héréditaire d'après le principe de récurrence.

rem. écriture formelle du principe de récurrence utilisé ci-dessus :

$[P(n_0) \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}\ (n\geqslant n_0)\ P(n)\Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow [\forall n\in\mathbb{N}\ (n\geqslant n_0)\ P(n)]$

on utilise parfois la variante :

$[P(n_0) \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}\ \forall m\leqslant n\ P(m)\Rightarrow P(m+1)] \Rightarrow [\forall n\in\mathbb{N}\ (n\geqslant n_0)\ P(n)]$

Dans ce cas, il suffit de remplacer "supposons que pour n fixé" par "supposons que ***jusqu'à*** *n fixé".*

Axel.