Logarithme - Exponentielle

Fonction logarithme népérien La fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule pour $x = 1$. Par conséquent :
- la dérivée de ln est $x \mapsto \frac{1}{x}$ (et, de façon plus générale, $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$)
- le domaine de définition de ln est $]0;+\infty[$
- $\ln 1 = 0$

Tableau de variations de ln On remarquera que $\ln x$ peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ (et que chacune de ces valeurs est prise une seule fois).

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+	+	+
$\ln x$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

Propriétés de ln Les nombres qui interviennent ci-dessous dans les logarithmes sont tous sensés être *strictement positifs.*

$$\ln ab = \ln a + \ln b \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \ln \frac{1}{a} = -\ln a \qquad \ln a^{\alpha} = \alpha \ln a \qquad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Courbes représentatives du logarithme et de l'exponentielle On remarquera que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

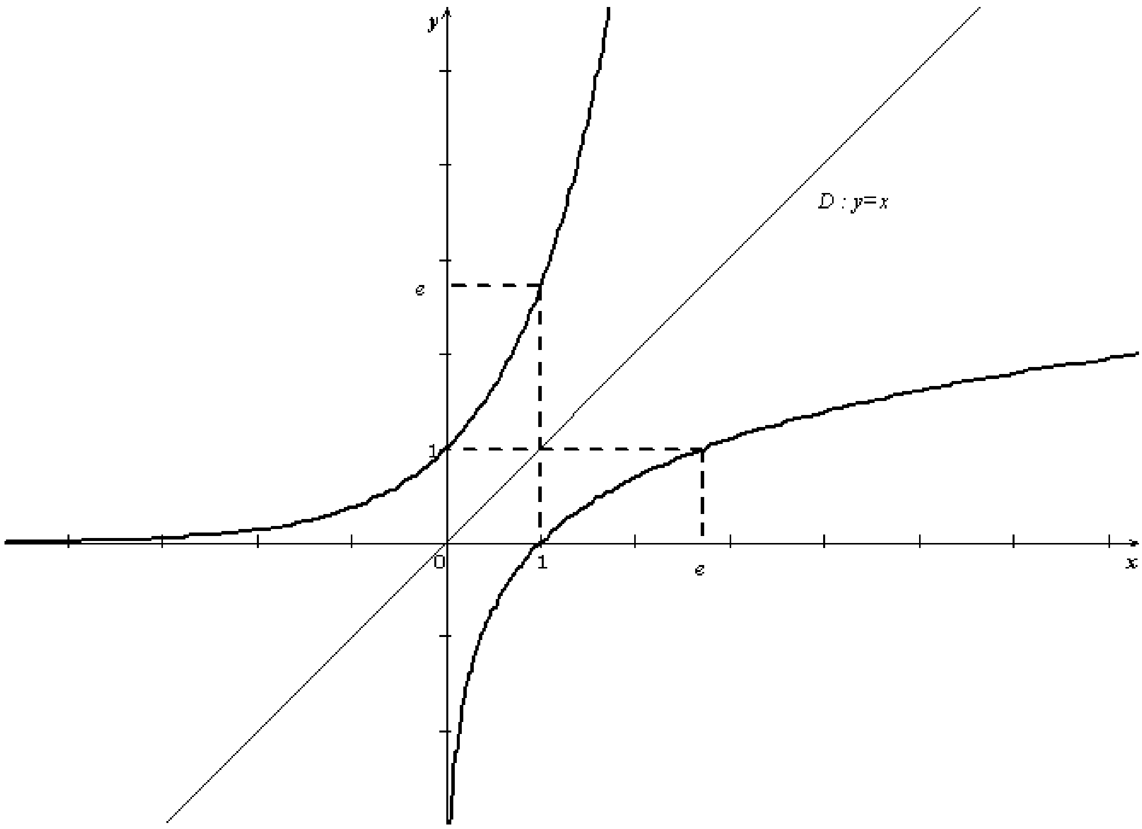

FIG. 1 – Le lecteur n'aura aucun mal à identifier les deux courbes en se reportant aux tableaux de variations...

Fonction exponentielle La fonction $x \mapsto e^x$ est définie par l'équivalence $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$ (qui explique la symétrie des courbes par rapport à la première bissectrice), le nombre e étant l'unique nombre tel que $\ln e = 1$. Il en résulte que $\ln(e^x) = e^{\ln x} = x$. De plus :

- la dérivée de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$ (et, de façon plus générale, $(e^u)' = u'e^u$)
- le domaine de définition de $x \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$
- $\ln e = 1$

Tableau de variations de $x \mapsto e^x$ On remarquera que e^x *est strictement positif pour toute valeur de x.*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
e^x				$+$			
e^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Propriétés de l'exponentielle

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad (e^a)^b = e^{ab}$$

Limites Lorsqu'interviennent des indéterminations concernant le logarithme et l'exponentielle, on peut s'aider de la phrase « *L'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x qui elle-même l'emporte sur le logarithme* ». En revanche, il ne faut pas citer cette règle sur une copie, mais faire les démonstrations en utilisant les limites de référence ci-dessous.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \text{(pour tout entier naturel } n \text{ non nul)}$$

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{(se démontrent en utilisant la définition d'un nombre dérivé)}$$

Exemple de rédaction pour un calcul de limite

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Primitives Les primitives des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln[u(x)] + C$ où C est une constante réelle. Les primitives des fonctions du type $x \mapsto e^{u(x)} \times u'(x)$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + C$ où C est une constante réelle.

Logarithme décimal $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

Exponentielle de base quelconque L'exponentielle de base a (où a est un réel strictement positif) est définie par $a^x = e^{x \ln a}$. La dérivée de $f_a : x \mapsto f_a(x) = a^x$ est $f'_a : x \mapsto f'_a(x) = a^x \ln a$.

Équation différentielle $y' = ay$ Ses solutions sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle qui peut être précisée si l'on connaît une valeur particulière de y, comme, par exemple, $y(0)$.

Équation différentielle $y' = ay + b$ Ses solutions sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où C est une constante réelle.