CONTINUITÉ

Continuité en un point

f continue à gauche en x_0 <=>	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
f continue à droite en x_0 <=>	$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
f continue en x_0 <=>	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
(i.e. f continue à gauche et à droite)	

Continuité sur un intervalle

Se démontre en citant (avec à-propos !) les théorèmes suivants :

Les fonctions polynomes, $x \to \cos x$, $x \to \sin x$, $x \to |x|$, $x \to e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions rationnelles, $x \to \operatorname{tg} x$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to \ln x$, sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

La somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur n'est pas nul !) de fonctions continues est continu.

La composée fog de deux fonctions f et g est continue en x_0 si g l'est en x_0 et f l'est en $g(x_0)$.

f^{-1} est continue si f l'est.

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $D \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Alors la fonction g définie sur D par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D \setminus \{x_0\} \\ L \text{ si } x = x_0 \end{cases}$ est continue en x_0 et s'appelle le *prolongement par continuité* de f en x_0.

Application aux suites

Si $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = L$ et si f est continue en L, alors $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = f(L)$.

Théorème dit "des valeurs intermédiaires "

Soit f continue sur $[a,b]$ et $f([a,b]) = [m,M]$. Alors $\forall y \in [m,M]\ \exists x \in [a,b] : f(x) = y$

Théorème dit "de Cauchy "

Si f est continue sur [a,b] et si $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans]a,b[. *(unicité si f monotone)*