Notions parfois mal connues des élèves de 1°S (voire de TS...) et souvent rappelées en cours...

Axel Chambily - Casadesus

1 Analyse

1.1 Fonctions affines

Définition Une fonction affine est une fonction f définie par une expression du type $f(x) = ax + b$.

Fonction linéaire Une fonction affine pour laquelle $b = 0$ s'appelle une fonction *linéaire*.

Variations Une fonction affine est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

Courbe La courbe représentative d'une fonction affine est une droite de *coefficient directeur* a et d'*ordonnée à l'origine* b.

1.2 Interprétation graphique de l'équation $f(x) = m$

Les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite (horizontale) d'équation $y = m$. On les visualise donc très simplement en déplaçant sur la courbe une règle (imaginaire ou non !) parallèle à l'axe des abscisses.

2 Géométrie analytique

2.1 Droites

Equation d'une droite non verticale Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$. m s'appelle le *coefficient directeur* et p l'*ordonnée à l'origine* (puisque c'est l'ordonnée obtenue pour $x = 0$).

Equation d'une droite verticale Une droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = C$ où C est une constante réelle.

Parallèles et perpendiculaires Si $D : y = mx + p$ et si $D' : y = m'x + p'$, alors :

- D parallèle à D' si et seulement si $m = m'$
- D perpendiculaire à D' si et seulement si $mm' = -1$ (le repère doit impérativement être orthonormé !)

Coefficient directeur Le coefficient directeur m de la droite (AB) peut être calculé par :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

2.2 Vecteurs

Coordonnées Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ (à écrire de préférence verticalement)

Colinéarité $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ si et seulement si $xy' - x'y = 0$ (critère dit "crucial" car le calcul se fait "en croix")

Orthogonalité $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ orthogonal à $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ si et seulement si $xx' + yy' = 0$ (le repère doit impérativement être orthonormé !)

Norme $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (le repère doit impérativement être orthonormé !)

2.3 Distance

$$\boxed{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

3 Algèbre

3.1 Inverses

Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses (cela vient du fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$).

Autrement dit :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^{*+} \forall b \in \mathbb{R}^{*+} a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}}$$

3.2 Carrés

Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés (cela vient du fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$).

Autrement dit :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall b \in \mathbb{R}^+ a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2}$$

3.3 Polynômes

Monôme : toute expression de la forme ax^n où a est un réel et n un *entier naturel*.

Binôme : toute expression de la forme $ax^n + bx^m$ où a et b sont des réels et n et m des *entiers naturels*.

Trinôme : toute expression de la forme $ax^n + bx^m + cx^p$ où a, b et c sont des réels et n, m et p des *entiers naturels*. Par exemple, $ax^2 + bx + c$ est l'écriture générale d'un trinôme du second degré.

Polynôme de degré n : toute expression de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où a_0, a_1, ... ,a_n sont des réels ($a_n \neq 0$) et n un *entier naturel*.

Fraction rationnelle : c'est le quotient de deux polynômes P et Q, donc une expression de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Une telle expression n'est définie que lorsque $Q(x) \neq 0$.

Méthode d'identification Deux polynômes sont identiquement égaux si tous leurs coefficients le sont. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

si et seulement si :

$$(a_0 = b_0) \text{ et } (a_1 = b_1) \text{ et } \cdots \text{ et } (a_n = b_n)$$

Développement partiel

$$3(x+1)(x+2) = (3x+3)(x+2)$$

ou

$$3(x+1)(x+2) = (x+1)(3x+6)$$

et pas d'autres choses farfelues...

Vocabulaire Les expressions suivantes sont équivalentes (mais on est prié de ne pas les mélanger !) :

- $P(a) = 0$
- a *annule* la *fonction* P
- a est un *zéro* de la *fonction* P
- a est une *racine* du *polynôme* P (à condition que la fonction P soit un polynôme !)
- a est une *solution* de l'équation $P(x) = 0$

Exemples de factorisations à maîtriser

- $x + 1 = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ (à condition que $x \neq 0$, bien sûr...)
- $100x^2 - 1000x + 2500 = 100(x^2 - 10x + 25) = 100(x - 5)^2$
- $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$

Signes simples et inégalités Être capable de dire tout de suite (par exemple...) que $x^2 + 1$ ne s'annule pas et est positif (supérieur à 1 serait un plus...).

3.4 Fractions

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}}$$

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\frac{1}{a}} = a}$$

Réduction au même dénominateur Un exemple :

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n + 2} = \frac{(n + 1) + n}{2n(n + 1)} = \frac{2n + 1}{2n(n + 1)}$$

et pas d'autres choses fantaisistes...

Multiplication Pour multiplier une fraction, on ne multiplie QUE le numérateur...

$$\boxed{k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}}$$

Par exemple : $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

Nullité d'une fraction Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur et nul et son dénominateur n'est PAS nul. Autrement dit :

$$\boxed{\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0)\ et\ (b \neq 0)}$$

3.5 Identités

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

3.6 Puissances

$$\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$$

en particulier : $\boxed{2^{n+1} = 2 \times 2^n}$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{nm}}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}}$$

$$\boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$$

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

3.7 Racines carrées

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}}$$

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}}$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Valeur absolue On rappelle que $|x| = x$ si x est positif et $|x| = -x$ si x est négatif. En particulier $|x - x_0| < \epsilon$ doit bien être lu $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ et compris comme "la distance de x à x_0 est strictement inférieure à ϵ".

Carré égal à un nombre positif : $x^2 = a$ (avec $a \geq 0$) si et seulement si $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

4 Géométrie

4.1 Vocabulaire

Conjecturer (ou "émettre une conjecture") : ne signifie pas autre chose que *deviner* (ou émettre un hypothèse) !

Décrit : dire qu'un point *décrit* une courbe revient à dire que ce point se *déplace* sur cette courbe.

Parcourt : synonyme de *décrit.*

Discuter : cela signifie en général qu'il y a plusieurs situations à envisager et qu'il faut les étudier toutes. C'est souvent le cas au moment de donner les solutions à un problème : il y a plusieurs cas à exposer.

Lieu géométrique : il s'agit de l'endroit où se trouve un objet (en général un point) quand une configuration varie.

- *exemple* : étant donné un triangle ABC, le lieu de son centre de gravité G lorsque A décrit une droite D est une droite parallèle à D.
- *remarque* : si l'énoncé demande "*l'ensemble des points tels que...*" au lieu de simplement demander le lieu, il faut penser à traiter la réciproque : "*tout point de l'ensemble trouvé est-il susceptible d'être un des points cherchés ?*".

Ensemble de points : il s'agit de dire où se trouvent tous les points soumis à une contrainte donnée.

- *exemple* : l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$ est la médiatrice de $[AB]$.

Colinéaires : se dit de deux *vecteurs* ayant la même direction.

Parallèles : se dit de deux *droites* dont l'intersection est vide.

Alignés : se dit de trois *points* appartenant à une même droite.

Coplanaires : se dit de deux objets appartenant à un même plan.

- *exemple* : trois points de l'espace sont toujours coplanaires

Cocycliques : se dit de plusieurs points appartenant à un même cercle

- *exemple* : trois points non alignés sont toujours cocycliques

Perpendiculaires : se dit de deux droites sécantes se coupant à angle droit (les deux mots *orthogonales* et *perpendiculaires* sont donc synonymes dans le plan).

Orthogonales : deux droites sont dites orthogonales si et seulement si leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires (deux droites de l'espace peuvent donc peuvent donc être orthogonales sans être sécantes). C'est le seul mot à employer lorsque l'on parle de vecteurs.

Normale : on appelle ainsi la direction orthogonale à un objet. On parle de "vecteur normal d'une droite", de "normale à une courbe" (droite perpendiculaire à la tangente).

Point de contact : point commun à deux courbes en lequel les tangentes à ces courbes sont confondues.

4.2 Configuration dont il faut rêver la nuit

- Tout triangle rectangle inscrit dans un cercle a pour hypoténuse un diamètre de ce cercle
- Réciproquement, si un triangle inscrit dans un cercle a pour côté un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

4.3 Intersection d'une droite D et d'un cercle C

Soit E cette intersection, R le rayon de C, Ω le centre de C et d la distance de Ω à D.

- Si $d > R$, $E = \emptyset$
- Si $d = R$, $E = \{A\}$ (A point de contact)
- Si $d < R$, $E = \{A_1; A_2\}$ (A_1 et A_2 points d'intersection)

4.4 Médiatrice d'un segment

- $MA = MB$ est synonyme de "M est un point de la médiatrice de $[AB]$".
- La médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu.
- Le point de concours des médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

4.5 Cercle et disque

- $OM = r$ est synonyme de "M est un point du cercle de centre O et de rayon r".
- $OM \leq r$ est synonyme de "M est un point du disque de centre O et de rayon r".
- Le périmètre d'un cercle est égal à $2\pi r$.
- L'aire d'un disque est égale à πr^2.

4.6 Bissectrices

- Les bissectrices d'une paire de droites sont les ensembles des points équidistants de ces droites. On distingue les bissectrices intérieures et extérieures.
- Dans un triangle, le point de concours des bissectrices intérieures est le centre du cercle inscrit, qui est tangent intérieurement aux trois côtés du triangle.
- Dans un triangle, le point de concours d'une bissectrice intérieure et de deux bissectrices extérieures est le centre d'un des trois cercles exinscrits, qui sont tangents extérieurement aux trois côtés du triangle.

4.7 Trigonométrie

- $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ (conséquence triviale du théorème de Pythagore)
- Valeurs remarquables pour les angles du premier quadrant :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

- Diagonale d'un carré de côté c = $\boxed{c\sqrt{2}}$
- Hauteur d'un triangle équilatéral de côté c = $\boxed{c\frac{\sqrt{3}}{2}}$

4.8 Angle inscrit - Angle au centre

- Deux angles inscrits dans un cercle interceptant le même arc sont égaux.
- L'angle au centre qui intercepte le même arc qu'un angle inscrit a pour mesure le double de la mesure de l'angle inscrit

4.9 Somme de deux vecteurs

Étant donnés deux points A et B et leur milieu I, on a, pour tout point M du plan :

$$\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}}$$

(égalité dite "du parallélogramme")

4.10 Relation de Chasles

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est toujours vrai
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ n'est vrai que si A, B et C sont alignés
- $AB + BC = AC$ n'est vrai que si A, B et C sont alignés dans cet ordre

4.11 Cas d'isométrie des triangles

(on disait autrefois "cas d'égalité")

- Deux triangles sont isométriques lorsque les mesures de leurs côtés sont deux à deux égales.
- Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes mesures.
- Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de mêmes longueurs.

4.12 Cas de similitude des triangles

- Si deux triangles ont deux de leurs angles respectivement égaux alors ils sont semblables.
- Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels alors ils sont semblables.
- Si deux triangles ont les longueurs de leurs trois côtés proportionnelles alors ils sont semblables.

4.13 Périmètres

- Carré : $4c$
- Rectangle : $2(L + l)$
- Cercle : $2\pi r = \pi D$

4.14 Aires

- Carré : c^2
- Rectangle : $L \times l$
- Parallélogramme : Bh
- Disque : πr^2
- Triangle : $\dfrac{Bh}{2}$
- Trapèze : $\dfrac{(B+b)h}{2}$
- Ellipse : πab
- Cylindre : $2\pi rh$
- Sphère : $4\pi r^2$

4.15 Volumes

- Cube : a^3
- Pavé : abc
- Cylindre : Bh
- Demi-cône : $\dfrac{Bh}{3}$
- Boule : $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

4.16 Une remarque TRÈS intéressante !

- Le volume de la boule est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ dont la dérivée est $4\pi r^2$, l'aire de la sphère...
- L'aire du disque est πr^2 dont la dérivée est $2\pi r$, le périmètre du cercle...

Ce ne sont bien entendu pas des hasards !

5 Logique

5.1 Quantificateurs

- universel : $\forall$ signifie "pour tout" ou "quelque soit"
- existentiel :
  - $\exists$ signifie "il existe au moins un"
  - $\exists!$ signifie "il existe un unique"

5.2 Equivalence, Implication...

- $\Leftrightarrow$ signifie "équivaut" ou "si et seulement si" ou "signifie que".
- Pour démontrer que $A \Leftrightarrow B$, il faut souvent démontrer que $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
- $B \Rightarrow A$ s'appelle la réciproque de $A \Rightarrow B$.
- Si $A \Rightarrow B$ on dit que A est une condition suffisante pour avoir B.
- Si $A \Leftrightarrow B$ on dit que A est une condition nécessaire et suffisante pour avoir B (et on dit la même chose de B relativement à A !).
- La proposition $A \Rightarrow B$ est équivalente à $nonB \Rightarrow nonA$. Les deux propositions sont dites "contraposées" l'une de l'autre.

5.3 Tel que

- S'écrit "/" dans un ensemble . Par exemple :

$$E = \{M \in P/MA^2 + MB^2 = 7\}$$

- S'écrit " :" dans une proposition. Par exemple :

$$\exists! x \in \mathbb{R} : 2x + 3 = 0$$

6 Arithmétique

6.1 PPCM

C'est le plus petit multiple commun à deux entiers donnés (c'est lui qui joue le rôle de dénominateur commun dans une réduction au même dénominateur). Pour le déterminer, on décompose les deux entiers en produit de facteurs premiers. Le PPCM est alors égal au produit de tous les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions affectés du plus grand exposant.

Par exemple :

- $84 = 2^2 \times 3 \times 7$
- $48 = 2^4 \times 3$
- donc PPCM(84,48)=$2^4 \times 3 \times 7$=336

6.2 PGCD

C'est le plus grand diviseur commun à deux entiers donnés. Pour le déterminer, on décompose les deux entiers en produit de facteurs premiers. Le PGCD est alors égal au produit des facteurs premiers communs qui apparaissent dans les deux décompositions affectés du plus petit exposant.

Par exemple :

- $84 = 2^2 \times 3 \times 7$
- $48 = 2^4 \times 3$
- donc PGCD(84,48)=$2^2 \times 3$=12

6.3 Nombres premiers

Un entier naturel premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$ (1 et lui-même). 1 n'est donc *pas* premier.

7 Divers

7.1 Pourcentages

- $t\%$ de $a = a \times \dfrac{t}{100}$
- pourcentage relatif de a par rapport à b : $\dfrac{a}{b} \times 100$
- augmentation de $t\%$: $\times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$
- diminution de $t\%$: $\times \left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$
- pourcentage d'évolution de la valeur a à la valeur b : $100 \times \dfrac{b-a}{a}$